[H2G2]
pp. 202-204

Backup : [Rom]

Décomposition polaire dans $GL_n \mathbb{C}$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On (re)définit :

$$U(n) = \{ U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid UU^* = I_n \} \text{ où } U^* =$$

$$\mathcal{H}^{++}(n) = \{ H \in GL_n(\mathbb{C}) \mid H = H^*,\ \forall x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} : {}^t\!$$

$$= \{ PP^* \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid P \in GL_n(\mathbb{C}) \}$$

$= \mathrm{Orb}(I_n)$ sous l'ac^{o} de congruence : $M \longmapsto PMP^*$

les matrices hermitiennes définies positives $n \times n$.

alors

$$\mu : \left\{ \begin{array}{ccc} U(n) \times \mathcal{H}^{++}(n) & \to & GL_n(\\ (U, H) & \longmapsto & HU \end{array} \right.$$

est un homéomorphisme.

---

① <u>μ est continu</u> car le produit matriciel l
(il est polynomial en les coeffs de mat
ou bilinéaire ...).

② <u>μ est surjectif</u>

Soit $M \in GL_n(\mathbb{C})$. On a $MM^* \in \mathcal{H}^{++}(n)$,
donc d'après le <u>théorème spectral</u> : $\exists P \in U(n)$,

$$MM^* = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P^*$$

où $\mathrm{Sp}\, M = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset \mathbb{R}_+^*$. car $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{H}^{++}($
et $\lambda_i = {}^t e_i D e_i > 0$

Posons alors $H := P \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} P^* = P \sqrt{D} P^*$

on a : $\left\{ \begin{array}{l} H^* = P^{**} \sqrt{D}^* P^* = P \sqrt{D} P^* = H \implies \boxed{H \in \mathcal{H}} \\ H^2 = PDP^* = MM^* \end{array} \right.$

et en posant $U := H^{-1} M$

$UU^* = H^{-1} M M^* H^{*-1} = H^{-1} H^2 H^{-1} = I_n \implies \boxed{U \in}$

et on a bien : $M = HU$

③ μ est injectif

Reprenons la même $M = HU$, et supposons $M = H'U'$ pour $(H', U') \in \mathcal{H}_n^{++}(n) \times U(n)$.

Alors ~~$H'^2 = (MU'^{-1})^2 = (MU'^*)^2 = MU'^*MU'^* = MU'^*U'M^*$~~
~~$= MM^* = H^2$~~ $\Rightarrow \boxed{H'^2 = H^2}$

$H^2 = MM^* = H'U'U'^*H'^* = H'^2$

Soit $Q \in \mathbb{R}_{(n-1)}[X]$ un polynôme interpolateur tq $\forall i \in [\![1;n]\!] : \quad Q(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$

Alors $H = P\sqrt{D}P^* = P\,Q(D)P^* = Q(PDP^*)$
$= Q(H^2) = Q(H'^2)$

or H' commute avec H'^2 donc avec $Q(H'^2) = H$

donc H' et H sont (co) diagonalisables (ds une base comm.)
$\hookrightarrow$ thm. spectral

$\exists P_0 \in GL_n\mathbb{C}, \quad \begin{cases} H = P_0 \operatorname{diag}(\mu_i) P_0^{-1} \\ H' = P_0 \operatorname{diag}(\mu_i') P_0^{-1} \end{cases}$

où $\{\mu_i\} = \mathrm{Sp}\,H \subset \mathbb{R}_+^*$, $\{\mu_i'\} = \mathrm{Sp}\,H' \subset \mathbb{R}_+^*$

donc $H^2 = H'^2 \Rightarrow P_0 \operatorname{diag}(\mu_i^2) P_0^{-1} = P_0 \operatorname{diag}(\mu_i'^2) P_0^{-1}$
$\Rightarrow \mu_i^2 = \mu_i'^2 \underset{\mu_i, \mu_i' \in \mathbb{R}_+^*}{\Leftrightarrow} \mu_i = \mu_i'$
$\Rightarrow \boxed{H = H'}$

et $U = MH^{-1} = MH'^{-1} = U'$, d'où l'injectivité.

④ μ^{-1} continu

Soit $(M_p)_{p\in\mathbb{N}} \in GL_n(\mathbb{C})^{\mathbb{N}}$ convergeant vers $M \in GL_n\mathbb{C}$.

on note $(U_p, H_p)_p = (\mu^{-1}(M_p))_p \in U(n) \times \mathcal{H}^{++}(n)$.

Comme $\boxed{U(n) \text{ est compact}}$: $\exists\, U_{\varphi(p)} \longrightarrow \overline{U} \in U(n)$

et $H_{\varphi(p)} = M_{\varphi(p)} U_{\varphi(p)}^{-1} \to M\overline{U}^{-1} =: \overline{H}$ par cont. de $^{-1}$

or $\overline{H} \in GL_n(\mathbb{C}) \cap \overline{\mathcal{H}^{++}(\mathbb{C})}$ dans $M_n(\mathbb{C})$ $= GL_n(\mathbb{C}) \cap \mathcal{H}_n^+(\mathbb{C}) = \mathcal{H}^{++}(n)$

$\triangle$ mieux : montrer que $\mathcal{H}^{++}(n)$ fermé ds $GL_n(\mathbb{C})$ avec $f : P \mapsto P \cdot P^*$

donc $M = \overline{H}\,\overline{U}$, $U_p \to U$, $H_p \to H$ donc μ^{-1} continu.
$= HU$
(car μ inj.)

ainsi, μ est un homéo.